SUJETS DE COLLES 05

1. Questions de cours.

- Qu'est-ce qu'une valeur propre ?
- Puissances de matrices semblables (énoncé et preuve).
- Qu'est-ce qu'un vecteur propre ?
- Expliquer avec le plus de détails possible les méthodes qui servent à calculer les puissances d'une matrice.
- Qu'appelle-t-on deux matrices semblables ? Quel est le lien avec l'endomorphisme associé à ces matrices ?
- Qu'est-ce qu'une matrice diagonalisable ? Donner les différentes caractérisations de la diagonalisabilité, puis un exemple de matrice diagonalisable et un contre-exemple.

2. Exercices classiques (intégration).

Exercice 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$, puis que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.

2. En déduire une expression plus simple de f.

3. Retrouver ce résultat grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 2

Étudions l'erreur commise lorsqu'on remplace une intégrale par une somme de Riemann. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Trouver un réel M tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant M$.

2. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt.$$

3. En déduire que pour tout entier n non nul,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

4. Écrire en `Python` un programme qui calcule et affiche une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ à `epsilon` près où `epsilon` est entré au clavier par l'utilisateur.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

existe.

2. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire une valeur de I_n en fonction de n.

3. Exercices classiques (réduction des matrices).

Exercice 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 en fonction de A.
2. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5
Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ? (sans calculs)

Exercice 6
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (4x - 6y, -2x)$. On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Montrer que f est diagonalisable, et donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f a pour forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\lambda < \mu$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?

4. Exercices plus difficiles.

Exercice 7

1. **a.** Donner le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}.$$
   b. Justifier la convergence de l'intégrale impropre
$$\int_1^2 \frac{\ln(t)dt}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}.$$
2. L'intégrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$$
est-elle convergente ?

Exercice 8
Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Étudier la convergence de l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} e^{-nt}dt$.
2. Étudier selon les valeurs de x la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.
3. On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} e^{-t}\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt$.
   a. Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.
   On distinguera les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

b. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = J_n(x)$.

4. On suppose ici que $0 < x < 1$.

a. Étudier la fonction g définie sur $[-\ln(x), +\infty[$ par
$$g(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

b. Calculer $\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Exercice 9

Montrer que l'intégrale
$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$
existe et calculer sa valeur (on pourra laisser l'expression finale sous forme de somme convergente).

Remarque 1. Les exercices plus avancés de réduction des matrices feront l'objet de la quinzaine de colles suivante.